

LL
.L69



THÈSES

DE

PHYSIQUE ET DE CHIMIE

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS,

Le Novembre 1850;

PAR M. J. LISSAJOUS,

Ancien élève de l'École Normale, agrégé de l'Université.

PARIS,

IMPRIMERIE DE BACHELIER,

RUE DU JARDINET, 12.

1850

ACADÉMIE DE PARIS.

FACULTÉ DES SCIENCES.

A

Mon Père et à ma Mère.

A

Monsieur P.-H. Blanchet,

Inspecteur général de l'Université.

Hommage de profonde reconnaissance.

THÈSE DE PHYSIQUE.

SUR LA POSITION DES NŒUDS

DANS LES LAMES QUI VIBRENT TRANSVERSALEMENT.

La question des lames vibrantes a été traitée à fond par les analystes, et les résultats du calcul ont été tous vérifiés par l'expérience. Il est cependant un point qui me paraît avoir échappé à l'attention des mathématiciens et des expérimentateurs, c'est la détermination exacte de la position des nœuds qui correspondent aux divers harmoniques que la lame peut produire.

Occupé depuis longtemps à des recherches sur les vibrations des plaques carrées, j'ai été détourné du sujet que j'avais primitivement choisi, par la nécessité d'expliquer certaines anomalies qui m'arrêtaient dans ce travail. J'ai été amené, par suite, à entreprendre des expériences analogues sur les lames vibrantes, ce qui m'a permis, tout à la fois, de me rendre compte des difficultés qui m'avaient embarrassé, et de constater quelques faits nouveaux. Les résultats simples auxquels je suis arrivé m'ont paru présenter quelque intérêt; et comme d'ailleurs ils formaient à eux seuls un ensemble nettement circonscrit, j'ai cru pouvoir les soumettre séparément au jugement de la Faculté.

Lorsqu'une lame vibre transversalement, six cas distincts peuvent se présenter, suivant les conditions auxquelles les extrémités de la lame sont assujetties:

1°. La lame est libre aux deux extrémités;

2°. La lame est encastrée aux deux extrémités;

3°. La lame est libre à une extrémité, encastrée à l'autre;

4°. La lame est libre à une extrémité, appuyée à l'autre;

5°. La lame est encastrée à une extrémité, appuyée à l'autre;

6°. La lame est appuyée aux deux extrémités.

L'ordre dans lequel nous rangeons ici ces différents cas est celui qui fait le mieux ressortir les analogies que nous voulons mettre en évidence dans la suite de ce travail.

PREMIER CAS. — *Lame libre à ses deux extrémités.*

Pour éviter, autant que possible, l'influence que les supports pouvaient exercer sur le mouvement de la lame, j'ai eu soin de la poser sur des morceaux de liége taillés en biseau, et fixés à de lourdes masses de plomb; je me mettais ainsi à l'abri des communications de mouvement.

J'ai dû d'abord examiner si les nœuds occupaient toujours la même place lorsque la lame rendait le même son; à cet effet, j'ai pris une lame de laiton divisée en millimètres, et étalonnée à la longueur de 500 millimètres. Après avoir nettoyé sa surface, de façon à n'y laisser aucune trace d'humidité ni de matières grasses, je l'ai saupoudrée très-légèrement de sable bien sec, et je l'ai attaquée avec l'archet par une de ses extrémités; aussitôt le son s'est produit, et les lignes nodales se sont tracées à la surface de la lame, avec la netteté d'un trait de plume : ce qui m'a permis de constater leur position sans me tromper de plus de $\frac{1}{2}$ de millimètre. J'ai reconnu ainsi qu'il arrivait souvent que les supports étaient à plus de 1 centimètre des nœuds; je les ramenais alors sous les lignes nodales les plus voisines; je faisais de nouveau vibrer la lame, le même harmonique se reproduisait, et les nœuds n'avaient pas varié de $\frac{1}{2}$ de millimètre. J'ai répété cette expérience un grand nombre de fois et sur des harmoniques différents; elle a toujours réussi. Je suis arrivé ainsi à reconnaître la fixité des nœuds, et à me convaincre que les supports avaient moins pour effet de déterminer la production d'un nœud dans le point

qu'ils soutenaient, que d'y empêcher la formation d'un ventre; ce qui avait pour résultat définitif de placer la lame dans les conditions les plus favorables à la production de tel ou tel harmonique. Néanmoins, pour que les vibrations de la lame s'exécutassent en toute liberté, j'avais toujours soin de ramener les supports sous les nœuds; le son sortait alors plus nettement, la lame vibrait dès le premier coup d'archet, sans qu'aucun harmonique secondaire vint troubler la pureté du son principal.

C'est en opérant de cette manière que j'ai constaté les résultats suivants :

Dans une lame qui rend un harmonique correspondant à cinq nœuds au moins, la distance entre deux nœuds consécutifs est la même, quels que soient les nœuds que l'on considère; il n'y a d'exception que pour les nœuds extrêmes, et la distance de chacun d'eux au nœud le plus voisin, est toujours, à très-peu près, les $\frac{9}{14}$ de la distance entre deux nœuds consécutifs pris dans la partie intermédiaire de la lame. Ces relations entre les divers internœuds sont les mêmes, quel que soit l'harmonique que l'on considère.

Il y a de même un rapport constant entre la distance du dernier ou du premier nœud à l'extrémité la plus rapprochée de la lame, et l'un quelconque des internœuds intermédiaires. Ce rapport est également indépendant de l'harmonique considéré.

Ces résultats ont été vérifiés sur une lame d'acier de 500 millimètres de longueur et 2 millimètres d'épaisseur, depuis le 4ᵉ harmonique jusqu'au 13ᵉ; sur une lame de laiton de 998 millimètres de longueur, depuis le 7ᵉ jusqu'au 10ᵉ; sur une lame de laiton de 499 millimètres de longueur sur $4^{mm},5$ d'épaisseur, du 4ᵉ au 8ᵉ; sur une lame de cuivre de $1^{m},56$ de longueur, depuis le 13ᵉ harmonique jusqu'au 26ᵉ. Les mesures ont été prises, tantôt à l'aide d'un compas, tantôt à l'aide d'un double décimètre divisé avec soin. En-

fin, je les ai vérifiées avec grande précision sur une lame de laiton de 500 millimètres, portant sur sa surface des divisions millimétriques très-fines.

Les faits ci-dessus énoncés sont donc indépendants de la longueur de la lame, de son épaisseur, de sa nature. J'ai d'autant plus de confiance dans leur exactitude, que j'en ai trouvé la confirmation analytique dans les équations qui peuvent servir à trouver la position des nœuds d'une lame vibrante; équations qu'Euler a données, sans les résoudre, dans les Actes de l'Académie de Saint-Pétersbourg, pour l'année 1779.

Cet habile analyste a examiné, avec beaucoup de détails, tout ce qui était relatif à la production des sons dans les lames vibrantes, mais il ne s'est pas occupé de la position des nœuds; il a seulement donné les équations qui pouvaient servir à les déterminer, sans remarquer que ces équations se simplifiaient beaucoup par la suppression de certains termes tout à fait négligeables, et pouvaient alors facilement se résoudre. De là est résultée une lacune qui a passé inaperçue, et dont personne, à ma connaissance, ne s'est préoccupé depuis cette époque.

Soit EF une lame dont la longueur est exprimée par a, soit S la distance d'un point quelconque de la lame à l'extrémité E, soit k la longueur du pendule simple qui vibrerait comme la lame, Euler pose

$$f = \sqrt[4]{bc^2 k} \quad \text{et} \quad \frac{a}{f} = \omega,$$

équation dans laquelle c représente l'épaisseur de la lame et b un coefficient qui dépend de la nature de la lame.

Les nombres de vibrations sont entre eux en raison inverse des valeurs que prend $\sqrt[2]{k}$, toutes choses égales d'ailleurs; par suite, ils sont inversement proportionnels à f^2, et enfin en raison directe des diverses valeurs que prend ω^2.

Si nous désignons par S la distance d'un nœud à l'extrémité E de la lame, et si nous posons $u = \frac{S}{a}$, nous aurons pour déterminer les nœuds, les deux équations suivantes :

$$\cos\omega = \frac{2}{e^{\omega} + e^{-\omega}}, \tag{1}$$

$$e^{\omega u} \mp e^{\omega(1-u)} + (1 \pm e^{\omega}) \sin\omega u + (1 \mp e^{\omega}) \cos\omega u = 0. \tag{2}$$

La première équation nous donnera, pour ω, une série de valeurs correspondant chacune à l'un des harmoniques de la lame. Chacune de ces valeurs devra être substituée dans l'équation (2), qui donnera alors, dans chaque cas, une série de valeurs pour la quantité u, correspondant chacune à l'un des nœuds de l'harmonique que l'on considère.

L'équation (1) peut se résoudre par approximation, et donne alors pour ω les valeurs

$$\frac{3\pi}{2}, \quad \frac{5\pi}{2}, \quad \frac{7\pi}{2}, \ldots, \quad \frac{(2K+1)\pi}{2},$$

K étant un nombre entier quelconque, par suite $\cos\omega = 0$ et $\sin\omega = \pm 1$; quant à l'équation (2), on doit ne garder que le signe supérieur lorsque $\sin\omega$ est positif, c'est-à-dire lorsque K est pair, et le signe inférieur lorsque K est impair.

Telles sont les indications données par Euler; il restait à trouver les racines de l'équation (2). Or de cette équation on tire

$$\sin\omega u - \cos\omega u$$

$$= \frac{-e^{\omega u} \pm e^{\omega(1-u)}}{1 \pm e^{\omega}} - \frac{2\cos\omega u}{1 \pm e^{\omega}}$$

$$= \frac{e^{-\omega u} \mp e^{-\omega(1-u)}}{1 \pm e^{-\omega}} \mp \frac{2e^{-\omega}\cos\omega u}{1 \pm e^{-\omega}}$$

$$= \left[e^{-\omega u} \mp e^{-\omega(1-u)} \mp 2e^{-\omega}\cos\omega u\right]\left[1 \mp e^{\omega -} + e^{-2\omega} \mp e^{-3\omega} + \ldots\right].$$

Or on peut, dans la série qui est en facteur, négliger

2

tous les termes, à l'exception du premier; car, dans le cas où il y a quatre nœuds seulement,

$$e^{-\omega} = e^{-\frac{7\pi}{2}} = 0,0001678;$$

l'erreur commise est donc plus petite que 0,000 1678 quand on prend le signe supérieur, et que 0,000 18 quand on prend le signe inférieur. Cette erreur devient inappréciable pour des valeurs plus élevées de ω; quant au terme $2e^{-\omega}\cos\omega u$, en y supposant que le cosinus ait sa valeur maximum 1, il ne dépasserait pas 0,000 34.

Notre équation se réduit donc, en négligeant également $2e^{-\omega}\cos\omega u$, à

$$\sin u\omega = e^{-\omega u} \mp e^{-\omega(1-u)}.$$

Nous pouvons nous faire une idée approchée de la valeur des diverses racines, en construisant les deux courbes

$$y = \sin\omega u - \cos\omega u,$$
$$y = e^{-\omega u} - e^{-\omega(1-u)},$$

lorsque K est pair, et les courbes

$$y = \sin\omega u - \cos\omega u,$$
$$y = e^{-\omega u} + e^{-\omega(1-u)},$$

lorsque K est impair.

(Il est bien entendu que dans ces équations, ωu représente l'abscisse et y l'ordonnée.)

Les valeurs de ωu qui correspondent aux divers nœuds seront donc les abscisses des points d'intersection, compris entre les limites $\omega u = 0$ et $\omega u = \frac{(2K+1)\pi}{2}$, car la première donne $u = 0$, d'où $S = 0$, et la deuxième $u = 1$, d'où $S = 0$; ces valeurs correspondent donc aux limites mêmes de la lame.

Les *fig.* 1 et 2 nous font voir que les valeurs de ωu

sont, lorsque K est pair,

$$\left(\frac{\pi}{4}+\delta_1\right),\quad \left(\frac{5\pi}{4}-\delta_2\right),\quad \left(\frac{9\pi}{4}+\delta_3\right),\ldots,$$

$$\left[\frac{(2K+1)\pi}{2}-\frac{5\pi}{4}+\delta_{n-1}\right],\quad \left[\frac{(2K+1)\pi}{2}-\frac{\pi}{4}-\delta_n\right],$$

et que, lorsque K est impair, les valeurs de ωu sont

$$\left(\frac{\pi}{4}+\delta'_1\right),\quad \left(\frac{5\pi}{4}-\delta'_2\right),\ldots,$$

$$\left[\frac{(2K+1)\pi}{2}-\frac{5\pi}{4}+\delta'_{n-1}\right],\quad \left[\frac{(2K+1)\pi}{2}-\frac{\pi}{4}-\delta'_n\right].$$

Nous allons faire voir que $\delta_2, \delta_3, \ldots, \delta_{n-1}$ et $\delta'_2, \delta'_3, \ldots, \delta'_{n-1}$ sont nuls, et que les quantités $\delta_1, \delta'_1, \delta_n, \delta'_n$ peuvent être considérées comme égales.

En effet, quand on donne à ωu la valeur $\frac{5\pi}{4}$, le premier terme exponentiel $e^{-\omega u}$ se réduit à 0,01970. Quant au second terme $e^{-\omega(1-u)}$, il dépend de la valeur donnée à ω dans le cas particulier dont on s'occupe. Du reste, il ne peut pas être supérieur au premier terme, et même, si le nombre de nœuds est de quatre seulement, sa valeur se réduit à 0,003 464; elle sera plus petite encore si le nombre des nœuds est plus considérable. Nous pouvons donc considérer les quantités $e^{-\omega u}+e^{-\omega(1-u)}$ et $e^{-\omega u}-e^{-\omega(1-u)}$, comme négligeables, lorsque ωu est compris entre $\frac{5\pi}{4}$ et $\left[\frac{(2K+1)\pi}{2}-\frac{5\pi}{4}\right]$.

Les nœuds intermédiaires se déduiront donc de l'équation

$$\sin\omega u-\cos\omega u=0,$$

en prenant les valeurs de ωu comprises entre $\frac{5\pi}{4}$ et $\left[\frac{(2K+1)\pi}{2}-\frac{5\pi}{4}\right]$. La différence entre deux valeurs suc-

cessives de ωu est π; de sorte que si nous appelons u_p, u_{p+1} les valeurs correspondantes de la quantité u, on a

$$u_{p+1} - u_p = \frac{\pi}{\omega} = \frac{\pi}{(2K+1)\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{2K+1}.$$

Mais, d'après les *fig.* 1 et 2, le nombre n des nœuds est égal à $K+1$; donc la distance entre deux nœuds consécutifs, pris dans la partie intermédiaire de la lame, sera donnée par la relation

$$u_{p+1} - u_p = \frac{2}{2n-1},$$

n étant le nombre des nœuds.

On tire de là,

$$\frac{S_{p+1} - S_p}{a} = \frac{2}{2n-1},$$

ou, en appelant D la distance constante entre deux nœuds consécutifs, parmi lesquels ne se trouve ni le premier ni le dernier nœud,

$$D = \frac{2a}{2n-1}.$$

Nous reconnaissons donc que l'analyse confirme l'un des faits que nous avions observés expérimentalement; elle nous donne, en outre, pour déterminer la distance entre deux nœuds consécutifs, pris au milieu de la lame, une formule que l'expérience vérifie, comme on le voit par le tableau suivant.

Quoique l'observation directe ne fournisse pas les centièmes de millimètres, nous avons cru devoir les indiquer; en effet, les nombres relatés dans le tableau sont obtenus en prenant la distance de deux nœuds non contigus, et divisant cette distance par le nombre d'internœuds, le résultat moyen que l'on obtient ainsi est donc d'autant plus exact, que le nombre d'internœuds est plus grand.

Expériences faites sur une lame de laiton de 500 millimètres de longueur.

NOMBRE des nœuds.	D		DIFFÉRENCE.
	Valeur calculée	Valeur observée.	
5	111,11	111,65	— 0,54
6	90,90	91,00	— 0,10
7	76,92	76,90	— 0,02
8	66,66	66,66	0,00
9	58,82	58,83	— 0,01
10	52,63	52,64	+ 0,01
11	47,61	47,66	+ 0,05
12	43,47	43,47	0,00
13	40,00	40,01	+ 0,01
14	37,03	37,07	+ 0,04

La valeur de ωu, qui correspond au deuxième nœud, est

$$\frac{5\pi}{4},$$

donc

$$u_1 = \frac{5\pi}{4} : \frac{(2K+1)\pi}{2} = \frac{5}{4n-2},$$

donc

$$S_1 = \frac{5a}{4n-2},$$

et, à cause de la disposition symétrique des nœuds,

$$a - S_{n-1} = \frac{5a}{4n-2}.$$

Les expériences faites sur la lame précédemment citée vérifient cette formule, comme le prouve le tableau suivant :

LAME DE 300mm.	$S_n = a - S_{n-1}$.		
NOMBRE des nœuds	Valeur de S_n calculée.	Valeur de S_n observée.	Valeur de $a - S_{n-1}$ observée.
5	138,8	138,1	138,6
6	113,6	113,0	113,0
7	96,1	95,8	95,8
8	83,3	83,0	83,2
9	73,5	73,1	73,2
10	65,7	65,4	65,5
11	59,5	59,2	59,2
12	54,3	54,0	54,0
13	50,0	49,7	49,9
14	46,2	46,1	46,0

Occupons-nous actuellement de la position du premier et du dernier nœud. Le premier sera donné par l'équation

$$\sin \omega u - \cos \omega u = e^{-\omega u},$$

le second, par l'équation

$$\sin \omega u - \cos \omega u = \mp e^{-\omega(1-u)},$$

qui se déduisent de l'équation

$$\sin \omega u - \cos \omega u = e^{-\omega u} \mp e^{-\omega(1-u)},$$

lorsqu'on néglige celui des deux termes exponentiels qui n'influe pas sur la valeur de ωu correspondant au nœud cherché. Du reste, l'équation qui donne le dernier nœud se ramène facilement à celle qui donne le premier. En effet, si nous appelons $\omega u'$ la distance du dernier nœud à l'extrémité voisine de la lame, nous aurons

$$\omega u' = \omega - \omega u.$$

Tirons de là la valeur de ωu, et substituons-la dans l'équation qui donne le dernier nœud, il viendra alors, toutes réductions faites,

$$\sin \omega u' - \cos \omega u' = e^{-\omega u'};$$

donc le premier et le dernier nœud sont à égale distance des extrémités correspondantes de la lame.

Pour obtenir la valeur de ωu qui correspond au premier nœud, il faut résoudre l'équation

$$\sin \omega u - \cos \omega u = e^{-\omega u}.$$

Or nous savons déjà que

$$\omega u = \frac{\pi}{4} + \delta;$$

donc

$$\sqrt{2} \sin \delta = e^{-\left(\frac{\pi}{4} + \delta\right)}.$$

Cette équation se résout par la méthode des approximations successives, en observant que l'on doit toujours prendre pour δ le plus petit arc correspondant au sinus donné par la résolution de l'équation. On arrive ainsi, après plusieurs substitutions, à $\delta = 14^\circ 28'$, valeur approchée à moins de 2 minutes; donc $\omega u = 0{,}3304\,\pi$, à une unité près du dernier ordre. Comme, d'ailleurs, $\omega = (2n - 1)\pi$, et que $u = \frac{S}{a}$,

$$S_1 = \frac{0{,}6608\, a}{2n - 1}.$$

Cette formule, appliquée à une lame de 500 millimètres de longueur, donne, à très-peu près, les nombres fournis par l'expérience, comme on le voit dans le tableau suivant :

LAME DE 500mm	$S_1 = S_n$.		
NOMBRE des nœuds.	Valeur de S_1 calculée.	Valeur de S_1 observée.	Valeur de $a - S_n$ observée.
5	36,4	36,8	36,9
6	30,0	30,0	30,0
7	25,4	25,5	25,5
8	22,0	22,2	22,2
9	19,4	19,6	19,6
10	17,3	17,5	17,6
11	15,7	15,8	16,0
12	14,3	14,4	14,6
13	13,2	13,4	13,4
14	12,2	12,3	12,4

Nous avons

$$S_1 = \frac{0,6608\,a}{2n-1}, \quad S_2 = \frac{5a}{2(2n-1)};$$

donc

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{1,3216}{5} = 0,26432.$$

Nous voyons donc que le rapport $\frac{S_1}{S_2}$ est constant, *quelle que soit la lame et quel que soit l'harmonique que l'on considère.*

Connaissant S_1, S_2 et D, on peut calculer $\frac{S_2 - S_1}{D}$; on trouve ainsi 0,9196 : ce qui confirme ce que nous avons dit en commençant, à savoir, que le premier et le dernier internœud sont plus courts que les autres d'environ un dixième, *quelle que soit la lame et quel que soit l'harmonique considéré.*

Résumons tout ce que nous avons dit sur la lame libre à ses deux extrémités.

Dans une lame ainsi disposée :

1°. Les nœuds intermédiaires sont équidistants ;

2°. Le premier et le dernier nœud sont à une distance du second et de l'avant-dernier nœud plus petite de 0,92 que la distance entre deux nœuds intermédiaires qui se suivent ;

3°. La distance du nœud le plus voisin de chaque extrémité à cette extrémité même est les 0,264 de la distance du nœud suivant au même point ;

4°. La distance du nœud le plus voisin de l'extrémité à cette extrémité même, est donnée par la formule

$$\frac{0,6608\,a}{2n-1};$$

la distance du nœud suivant au même point, par la formule

$$\frac{5\,a}{4n-2},$$

et la distance entre deux nœuds consécutifs, pris dans le milieu de la lame, par la formule

$$\frac{2\,a}{2n-1}.$$

Ces résultats sont vrais, quelle que soit la longueur de la lame, quelle que soit son épaisseur, et quel que soit l'harmonique que l'on considère.

DEUXIÈME CAS. — *La lame est fixée à ses deux extrémités.*

On se sert ordinairement, pour fixer la lame à chaque extrémité, d'un étau très-lourd dont les mâchoires sont disposées de façon à presser dans le sens vertical. Or, quelque bien fait que soit un étau, il ne peut serrer la lame uniformément, de façon à assurer l'immobilité de la partie serrée, sans qu'en même temps il exerce sur elle une certaine pression qui doit altérer son mouvement. On peut, il est vrai, atténuer cet inconvénient par l'emploi de mâ-

choires en plomb qui, par la pression, se moulent sur la lame, et la serrent plus uniformément; mais ces mâchoires, en raison même de leur mollesse, doivent laisser à la lame une certaine liberté près de leur bord, ce qui empêche de dire au juste où se trouve la limite de la partie fixée : on est donc entraîné à serrer davantage, et le plomb agit alors comme un métal dur. Ces inconvénients, particuliers à chaque étau, se compliquent encore des difficultés qui résultent de leur emploi simultané. Comment, en effet, serrer une lame dans deux étaux à la fois, sans qu'elle éprouve une traction ou une pression dans le sens de sa longueur ?

Tels sont les écueils que j'ai cherché à éviter par le procédé suivant, auquel je suis arrivé après de longs essais :

J'ai pris une lame de laiton de 1 mètre de longueur, et j'ai fait souder sur chacune de ses faces deux masses de laiton pesant chacune $1^{kil},5$; ces masses avaient la forme de parallélipipèdes rectangles : leur hauteur était de 55 millimètres, leur largeur de 25 millimètres, leur longueur de 125 millimètres; elles avaient été dressées avec soin, puis fixées à la lame avec des vis et des goupilles, et enfin soudées à l'étain; elles maintenaient ainsi la lame dans une étendue d'environ 125 millimètres à partir de chaque extrémité, de façon à assurer l'inflexibilité de la partie encastrée, sans cependant la presser. La longueur de la lame était ainsi réduite à 752 millimètres.

La *fig.* 3 représente cette disposition. Les masses extrêmes reposaient sur un support bien dressé et échancré de façon que l'archet pût agir librement sur les parties intermédiaires. J'avais eu seulement la précaution de coller du drap sous chaque masse pour amortir les vibrations qui auraient pu se communiquer aux supports. Cette disposition avait l'avantage de ne pas exercer sur la lame une traction ou une pression également préjudiciables. Je pus le reconnaître aisément à la facilité avec laquelle la lame vibrait, et à la pureté du son produit. Du reste, les masses

extrêmes étaient si peu influencées par les mouvements de la lame, que le sable projeté à leur surface se déplaçait à chaque coup d'archet d'une quantité très-faible, sans jamais s'accumuler dans un point plutôt que dans un autre. Les lignes nodales se produisaient avec la même netteté que dans le cas précédent, et je mesurais leur distance avec un double décimètre divisé que j'avais vérifié à l'avance. Je ne pouvais guère me tromper par ce moyen de plus d'un quart de millimètre.

J'ai reconnu que, sur une lame ainsi disposée, les nœuds occupaient la même place que sur une lame libre de même longueur; avec cette seule différence, que le premier et le dernier nœud avaient été déplacés, et s'étaient reportés aux extrémités mêmes de la lame. Les formules données dans le cas précédent pour S_2, S_{n-1} et D, doivent donc s'appliquer également à celui-ci. C'est, du reste, ce que l'on voit par le tableau suivant :

Nombre de nœuds.	$S_2 = a$, $S_{n-1} = \frac{3a}{4n-2}$.			$D = \frac{2a}{2n-1}$.	
	S_2 calculé.	S_2 observé.	S_{n-1} observé.	Calculé.	Observé.
6	170,9	172,0	171,3	136,7	136,2
7	144,6	144,9	145,5	115,6	115,4
8	125,3	125,0	126,0	100,2	100,2
9	110,5	110,0	111,0	88,4	88,5
10	98,9	98,5	99,0	79,1	79,2
11	89,5	88,7	89,5	71,6	71,7
12	81,7	81,0	81,7	65,5	65,4
13	75,2	74,2	74,8	60,1	60,3
14	69,6	68,5	69,0	55,6	55,8
15	64,8	64,5	63,5	51,8	52,0
16	"	"	"	"	"
17	56,9	55,9	56,2	42,9	42,9

Les résultats qui précèdent peuvent être démontrés analytiquement; on a, en effet, d'après Euler, en adoptant les mêmes notations que précédemment :

$$(1) \qquad \cos\omega = \frac{2}{e^{\omega} + e^{-\omega}},$$

d'où l'on tire pour ω les valeurs $\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \ldots, \frac{(2K+1)\pi}{2}$,

$$(2) \quad e^{\omega u} \mp e^{\omega(1-u)} - (1 \pm e^{\omega}) \sin\omega u - (1 \mp e^{\omega}) \cos\omega u = 0.$$

La méthode employée dans le cas précédent s'applique ici avec la même approximation.

Nous obtiendrons donc de la même manière l'équation suivante :

$$\sin\omega u - \cos\omega u = -e^{-\omega u} \pm e^{-(1-u)\omega},$$

dans laquelle le signe supérieur correspond au cas où $\sin\omega$ est positif, c'est-à-dire où K est pair, et le signe supérieur au cas où K est impair.

Le même procédé graphique nous conduit à reconnaître que les valeurs de ωu, qui satisfont à l'équation (2), sont :

$$0, \quad \left(\frac{5\pi}{4} + \delta_1\right), \quad \left(\frac{9\pi}{4} - \delta_2\right), \ldots,$$

$$\left(\omega - \frac{9\pi}{4} + \delta_2\right), \quad \left(\omega - \frac{5\pi}{4} - \delta_1\right), \quad \omega.$$

On démontre, comme précédemment, que δ_1 est très-petit, δ_2 encore plus, et qu'on peut, sans erreur sensible, considérer les valeurs de ωu comme égales à 0, $\frac{5\pi}{4}$, $\frac{9\pi}{4}$, etc., valeurs qui correspondent aux nœuds de la lame libre, à l'exception de la première et de la dernière.

Troisième cas. — *La lame est libre à une extrémité et fixée à l'autre.*

Les expériences se font comme dans le cas précédent; seulement il n'y a qu'une extrémité de la lame encastrée, l'autre extrémité est libre, et l'on soutient la lame en un point intermédiaire à l'aide d'un chevalet de liége fixé sur une lourde masse de plomb. On peut alors attaquer l'extrémité libre avec l'archet, et le son sort avec la plus grande facilité si le chevalet est placé sous un nœud. On reconnait ainsi que les nœuds intermédiaires sont placés comme dans les deux cas précédents; seulement les nœuds extrêmes sont : l'un à l'extrémité fixée, l'autre à une distance de l'extrémité libre égale à celle qui le séparerait de cette même extrémité sur une lame entièrement libre et de même longueur.

Nous avons donc, comme dans les cas précédents :

$$S_1 = \frac{0,6608\,a}{2n-1}, \quad S_2 = a_n - S_{n-1} = \frac{5a}{4n-2}, \quad D = \frac{2a}{2n-1}.$$

Le tableau suivant fait voir l'accord qui existe entre le calcul et l'observation :

NOMBRE des nœuds	$a = 877^{mm}$. S₁ calculé.	observé.	S₂ calculé	observé	$a-S_{n-1}$ observé	D calculé	obs.
7	44,5	45,0	168,6	168,5	168,5	134,9	135,0
8	38,6	39,0	146,1	147,5	147,0	116,9	117,2
9	34,0	34,0	128,9	129,5	128,5	103,1	103,1
10	30,4	31,0	115,1	115,5	114,5	92,3	92,2
11	27,5	27,8	104,4	103,5	103,0	83,5	83,8
12	25,1	25,4	95,3	95,0	95,0	76,4	76,4
13	23,2	23,5	87,7	87,5	87,5	70,1	70,2
14	21,4	21,5	81,3	81,0	81,0	64,9	65,0
15	19,9	20,4	75,8	75,3	75,3	60,4	60,5
16	18,6	19,0	70,7	70,0	70,0	56,6	56,4
17	17,5	17,5	66,4	65,8	65,8	53,1	53,2
18	16,5	16,5	62,6	62,3	61,8	50,1	50,2
19	15,6	16,0	59,2	58,8	58,5	47,4	47,4
20	14,8	14,5	56,2	55,8	55,8	44,9	45,0
21	14,1	14,0	53,4	52,6	52,6	42,7	42,8
22	13,4	13,5	50,9	50,3	50,1	40,7	40,8
23	12,8	12,8	48,7	48,0	47,6	38,9	39,0

Ces résultats, comme les précédents, sont confirmés par l'analyse; en effet, dans le cas qui nous occupe, les formules données par Euler sont :

$$\cos\omega = \frac{-2}{e^{\omega} + e^{-\omega}}, \quad \text{d'où} \quad \omega = \frac{(2K+1)\pi}{2},$$

$$e^{\omega u} \pm e^{\omega(1-u)} + (1 \mp e^{\omega}) \sin \omega u + (1 \pm e^{\omega}) \cos \omega u = 0;$$

en résolvant par approximation on trouve

$$\sin\omega u - \cos\omega u = e^{-\omega u} \pm e^{-(1-u)\omega}.$$

Le signe supérieur correspond toujours au cas où K est pair.

Si nous appliquons à cette équation le même mode de discussion que dans les deux cas précédents, nous recon-

naissons que dans la lame libre à un bout et fixée à l'autre, les nœuds intermédiaires qui étaient communs à la lame libre aux deux bouts et à la lame fixée aux deux extrémités conservent leur place, et les deux nœuds extrêmes sont placés, l'un comme dans la lame libre, l'autre comme dans la lame fixée.

Nous voyons par ce qui précède que les trois cas dont nous venons de parler se ramènent à un seul, celui de la lame libre aux deux extrémités. On peut de même y ramener les deux cas suivants, où la lame a l'une de ses extrémités libre ou fixée, l'autre étant simplement appuyée.

Il est, en effet, naturel d'assimiler l'extrémité appuyée à l'un des nœuds intermédiaires, et de considérer la lame comme vibrant de la même manière que l'une des moitiés d'une lame libre de longueur double dont les deux extrémités seraient libres ou fixées, et dans laquelle le nombre de nœuds serait égal à $2n-1$.

Quatrième cas. — *La lame a l'une de ses extrémités libre et l'autre appuyée.*

D'après ce qui précède, si le nombre des nœuds est n, il faudra dans les formules relatives à la lame libre changer a en $2a$ et n en $2n-1$; nous aurons alors pour la distance du premier nœud à l'extrémité de la lame :

$$S_1 = \frac{0,6608}{4n-3} \times 2a = \frac{1,3216\,a}{4n-3}, \quad S_1 = \frac{5a}{4n-1},$$

et enfin la distance entre deux nœuds consécutifs ne comprenant pas le nœud voisin de l'extrémité libre est donnée par la formule

$$D = \frac{4a}{4n-3}.$$

Ces formules, appliquées à une lame de 500 millimètres de longueur, donnent des résultats que l'expérience con-

firme. Du reste, ce genre d'expériences n'est pas sans difficulté. Il faudrait, en effet, pour que l'expérience se fît bien, que la section extrême de la lame pût pivoter librement autour d'une ligne située à égale distance de l'arête supérieure et de l'arête inférieure. Or cette condition est difficile à remplir dans la pratique. Si la lame est pressée fortement contre un corps dur, la section extrême est presque réduite à l'immobilité, et l'on se rapproche des conditions de la lame fixée. Si, au contraire, on presse la lame contre un corps mou, la lame vibre alors à peu près comme si l'extrémité, au lieu d'être appuyée, était tout à fait libre. Ainsi, lorsque je pressais une lame contre un mur en interposant un morceau de liége de 1 centimètre d'épaisseur, les nœuds se formaient sur cette lame à peu près à la même place que si elle eût été libre; seulement le nœud le plus voisin de l'extrémité appuyée était plus loin de cette extrémité même que le premier nœud ne l'était de l'extrémité libre : la différence ne dépassait pas 2 millimètres sur 20.

Je n'ai donc pu faire sortir de la lame que quelques harmoniques qui du reste vérifient assez bien les lois ci-dessus énoncées, comme on le voit dans le tableau suivant :

NOMBRE de nœuds	S_1 calculé	S_1 observé	S_2 calculé.	S_2 observé.	D calculé.	D observé.
4	50,8	50,0	192,3	191,5	153,8	155,0
5	38,8	39,0	147,0	147,0	117,6	117,6
6	31,4	30,5	119,0	118,5	95,2	95,3

L'analyse confirme ce que nous avons dit plus haut ; on a, en effet, dans le cas actuel,

$$(1) \qquad \tang \omega = \frac{e^{\omega} - e^{-\omega}}{e^{\omega} + e^{-\omega}}, \quad \text{d'où} \quad \omega = \frac{(4K+1)\pi}{4}$$

$$(2) \quad e^{u\omega} - e^{\omega(2-u)} + (1 + e^{2\omega}) \sin u\omega + (1 - e^{2\omega}) \cos u\omega = 0.$$

La construction graphique donne comme précédemment $n = K + 1$.

Si nous remplaçons ω par sa valeur, il viendra

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} & e^{\frac{4K+1}{2}\pi\frac{u}{2}} - e^{\frac{4K+1}{2}\pi\left(1-\frac{u}{2}\right)} \\ & + \left(1 + e^{\frac{(4K+1)}{2}\pi}\right)\sin\frac{4K+1}{2}\pi\frac{u}{2} \\ & + \left(1 - e^{\frac{(4K+1)}{2}\pi}\right)\cos\frac{4K+1}{2}\pi\frac{u}{2} = 0. \end{aligned}\right.$$

Or si nous posons

$$\frac{u}{2} = u' \quad \text{et} \quad \frac{(4K+1)\pi}{2} = \omega',$$

l'équation (3) devient

$$e^{u'\omega'} - e^{\omega'(1-u')} + \left(1 + e^{\omega'}\right)\sin u'\omega' + \left(1 - e^{\omega'}\right)\cos u'\omega' = 0,$$

équation qui donne les nœuds dans une lame libre de longueur double lorsque ce nombre de nœuds est impair.

La position des nœuds dans la lame libre à un bout et appuyée par l'autre sera donc la même que dans une lame libre aux deux bouts et de longueur double qui aurait un nœud en son milieu.

CINQUIÈME CAS. — *La lame est fixée par une extrémité, appuyée par l'autre.*

Pour faire ces expériences, j'ai pris la lame qui m'avait déjà servi et qui était encastrée par une de ses extrémités; j'ai serré la masse placée à un bout dans un étau, et j'ai appuyé l'autre extrémité contre une masse de plomb serrée dans un autre étau. J'ai pu alors l'attaquer latéralement avec l'archet, et les différents sons sont sortis sans difficulté. Il fallait seulement prendre quelques précautions pour ne pas être gêné par les vibrations tournantes qui tendent toujours à se produire lorsque la lame est attaquée par côté.

Cette difficulté peut même arrêter tout à fait lorsque, par un hasard qui se présente quelquefois, les lignes nodales de l'harmonique que l'on veut produire se confondent avec les lignes nodales transversales qui correspondent à l'un des modes de vibrations tournantes. C'est ce qui m'est arrivé pour l'harmonique correspondant à 16 nœuds.

Malgré cette lacune, les résultats obtenus ont confirmé l'opinion où j'étais à priori que les nœuds devaient être placés dans la lame fixée à un bout, appuyée à l'autre, comme dans une lame de longueur double fixée aux deux bouts, et dont le milieu eût été un nœud.

La position des nœuds s'obtient en effet à l'aide des formules

$$S_1 = \frac{5a}{4n-3}, \quad D = \frac{4a}{4n-3},$$

comme on peut le voir par le tableau suivant :

NOMBRE de nœuds.	LAME DE 877 MILLIMÈTRES DE LONGUEUR.			
	S_1 calculé.	S_1 observé	D calculé.	D observé.
4	337,3	337,0	269,8	270,5
5	257,8	257,3	206,3	206,5
6	208,8	208,5	167,0	167,1
7	175,4	175,0	140,3	140,4
8	151,2	151,0	120,9	121,0
9	132,8	132,5	116,3	116,3
10	118,5	118,0	94,8	94,8.
11	106,9	107,0	85,5	85,5
12	97,4	96,7	77,9	77,9
13	89,4	88,5	71,5	71,6
14	82,7	82,0	66,3	66,2
15	76,9	76,5	61,6	61,6
16	"	"	"	"
17	67,4	66,0	53,9	54,0
18	62,5	62,5	50,8	50,9

La distance de l'avant-dernier nœud à l'extrémité appuyée s'est toujours trouvée à très-peu près égale à la distance entre deux nœuds intermédiaires placés à la suite l'un de l'autre. Seulement j'ai eu occasion de constater de faibles différences, tantôt dans un sens, tantôt dans un autre, qui confirment ce que j'ai dit plus haut relativement à la difficulté qu'il y a d'appuyer convenablement l'extrémité de la lame. J'ai remarqué, en effet, que le dernier internœud était plus grand que les suivants d'une faible quantité quand la lame était pressée fortement contre la masse de plomb qui la maintenait, tandis que, dans d'autres expériences où la lame était simplement appuyée contre un mur et pressée avec moins de force, le dernier internœud était au contraire plus court que les autres.

Les résultats fournis par l'expérience dans le cas actuel sont confirmés par les formules déduites comme précédemment des équations d'Euler; on a, en effet,

$$\operatorname{tang} \omega = \frac{e^{\omega} - e^{-\omega}}{e^{\omega} + e^{-\omega}},$$

et

$$e^{u\omega} - e^{\omega(-2-u)} - \left(1 + e^{-2\omega}\right) \sin u\omega + \left(1 - e^{-2\omega}\right) \cos u\omega = 0.$$

Ces deux équations, traitées par les mêmes procédés que dans le cas précédent, conduisent à un résultat analogue, c'est-à-dire à l'équation qui donne les nœuds dans une lame de longueur $2a$ encastrée à ses deux extrémités, en supposant toujours que le milieu soit un nœud.

Sixième cas. — *La lame est appuyée par ses deux extrémités.*

Ce dernier cas a été traité par Euler; il a reconnu que les nœuds étaient alors équidistants, ce que Chladni a vérifié expérimentalement. C'est le seul cas qu'Euler ait traité complétement.

Nous ne nous sommes pas occupé jusqu'à présent des sons qui correspondent, dans chaque cas, aux différents harmoniques. Euler a, en effet, donné sur ce sujet des lois numériques que Chladni a vérifiées et que l'on trouve indiquées dans les ouvrages classiques. Il est cependant possible de grouper ces résultats, de manière à faire ressortir entre les différents cas des analogies qui n'ont pas, je crois, été remarquées, d'autant plus qu'elles sont une conséquence de ce qui précède.

Si nous avons soin de compter comme nœuds les extrémités fixées ou appuyées, ce que Chladni a négligé de faire, nous remarquons de suite que dans les trois premiers cas, c'est-à-dire quand la lame a ses extrémités libres ou fixées, elle donne les mêmes sons pour les mêmes nombres de nœuds, quelle que soit d'ailleurs la disposition des extrémités. En effet, si nous avons

$$2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ldots,\ n \text{ nœuds},$$

les sons sont entre eux comme les carrés des nombres

$$3,\ 5,\ 7,\ 9,\ 11,\ 13,\ 15,\ldots,\ 2n-1.$$

Si la lame est appuyée à l'une de ses extrémités, l'autre étant fixée ou libre, les sons correspondant à

$$2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ldots,\ n \text{ nœuds},$$

seront entre eux comme les carrés de

$$5,\ 9,\ 13,\ 17,\ldots,\ 4n-3.$$

Enfin si les deux extrémités sont appuyées, la lame restant toujours la même, les sons qui correspondent à

$$2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ldots, \text{ nœuds},$$

seront entre eux comme les carrés de

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ldots,\ n-1.$$

Or si nous représentons par 1 le son qui correspond à

deux nœuds dans le dernier cas, le son correspondant à deux nœuds sera, comme on sait, $\frac{9}{4}$ pour les trois premiers cas et $\frac{25}{16}$ pour les deux autres. Nous aurons donc, pour les sons correspondant à un même nombre n de nœuds,

$$(n-1)^2, \quad \frac{(2n-1)^2}{4} \quad \text{et} \quad \frac{(4n-3)^2}{16}.$$

Or, dans les mêmes hypothèses, on a

$$D = \frac{a}{n-1}, \quad D = \frac{2a}{2n-1}, \quad D = \frac{4a}{4n-3},$$

D étant la longueur d'un internœud intermédiaire. Donc, dans tous les cas possibles, le son rendu par la lame est représenté par $\frac{a^2}{D^2}$.

Ainsi quand une lame vibrante fait entendre un harmonique suffisamment élevé, les internœuds intermédiaires vibrent comme des lames de même longueur et de même épaisseur dont les deux extrémités seraient appuyées; et le nombre des vibrations, toutes choses égales d'ailleurs, est en raison inverse du carré de la distance entre deux nœuds consécutifs. L'influence des extrémités ne s'exerce donc pas sensiblement sur la partie intermédiaire de la lame; il n'y a même que le dernier nœud et le premier qui soient notablement influencés.

Aussi la formule qui donne la valeur de D s'applique-t-elle même lorsque le nombre de nœuds est réduit à quatre. En effet, la lame libre que nous avons déjà employée nous donne, dans le cas où $n = 4$, $D = 143$ millimètres; le calcul donne $D = 142,8$.

Les formules qui donnent S_1 et S_2 s'appliquent encore, car on a

Par le calcul....	$S_1 = 47,2$	Par le calcul....	$S_2 = 178,5$
Par l'expérience.	$S_1 = 47$	Par l'expérience.	$S_2 = 179$

Ces dernières formules s'appliquent encore au cas où il

n'y a que trois nœuds; on a, en effet,

Par le calcul.... $S_1 = 66$ Par le calcul.... $S_2 = 250$

Par l'experience. $S_1 = 66$ Par l'expérience. $S_2 = 250$

Il est même à remarquer que la formule

$$S_2 = \frac{5a}{4n-2}$$

donne rigoureusement $S_2 = \frac{a}{2}$ quand on y fait $n = 3$.

Enfin la formule

$$S_1 = \frac{0{,}6608\,a}{2n-1}$$

s'applique même au cas où les nœuds sont au nombre de deux seulement; le calcul prouve que l'erreur ne peut alors s'élever à 0,026 : dans ce cas $S_1 = 0{,}22 \times a$.

Ainsi les formules que nous avons déduites des équations d'Euler s'appliquent dans tous les cas possibles, et, quoiqu'elles ne soient qu'approchées, l'erreur que l'on peut commettre en les employant n'est jamais supérieure aux erreurs d'expérience.

En négligeant dans chaque cas les premiers harmoniques pour lesquels l'influence des extrémités s'étend d'une façon appréciable jusqu'au milieu de la lame, la loi des sons devient la même dans tous les cas, pourvu que l'on exprime le nombre de vibrations rendues par la lame, non pas en fonction du nombre de nœuds, mais en fonction de la distance entre deux nœuds consécutifs pris dans la région de la lame que les extrémités n'influencent pas.

C'est, comme on le voit, un simple changement de variable indépendante qui amène cette simplification. Nous croyons, du reste, qu'il y aurait avantage à appliquer des principes analogues dans les autres parties de l'acoustique. Si, au lieu de considérer le nombre de divisions du corps vibrant, on ne s'occupait que des dimensions des parties circonscrites par des lignes nodales formées librement, de façon à comparer toujours des parties semblables soumises

au même mode de vibration, on arriverait nécessairement à des lois plus simples et plus précises, car on écarterait par là l'influence des limites qui apporte dans les résultats que l'on cherche un élément inévitable de complication.

Cette influence perturbatrice des limites du corps vibrant est encore plus gênante dans les plaques où elle varie avec le degré de complication de la figure nodale et avec la disposition que cette figure présente relativement au contour de la plaque. Aussi est-il bien difficile de dire au juste jusqu'où elle peut s'étendre dans chaque cas particulier ; et cependant, là encore, on obtient des résultats simples et précis lorsqu'on porte son attention sur les parties de la plaque qui ne sont pas influencées visiblement par les bords.

Ces considérations, que je ne fais qu'indiquer et qui trouveront leur développement naturel dans un autre travail, m'ont été d'un grand secours dans les recherches que j'ai depuis longtemps entreprises sur les vibrations des plaques (1). Si je suis assez heureux pour que la Faculté accorde son approbation au travail que j'ai l'honneur de lui soumettre aujourd'hui, je me trouverai encouragé par cela même à poursuivre des recherches délicates dont Savart avait compris toute l'importance, et qu'il continuait encore lorsque la mort est venue le surprendre.

Vu et approuvé,
Le 19 octobre 1850.
Le Doyen de la Faculté des Sciences,
MILNE EDWARDS.

Permis d'imprimer,
L'Inspecteur général de l'Instruction publique,
Chargé de l'Administration de l'Académie de la Seine,
CAYX.

(1) Ces idées sont, du reste, pleinement confirmées par des expériences que j'ai faites depuis sur les lames chargées de curseurs, expériences dont je n'ai pas cru devoir donner le détail ici, pour ne pas altérer le texte primitif de cette Thèse.

PROGRAMME

D'UNE

THÈSE DE CHIMIE.

Des diverses méthodes eudiométriques employées à la détermination des principes constituants de l'air atmosphérique, et à la recherche des gaz qui s'y trouvent accidentellement mélangés.

Détermination de la quantité d'oxygène contenue dans l'air atmosphérique par la détonation avec l'hydrogène. — Description et usage des divers eudiomètres à eau et à mercure. — Eudiomètre de Gay-Lussac. — Eudiomètre de Volta. — Eudiomètre de M. Regnault. — Appareils de M. Doyère.

Précautions à prendre lors de la détonation et dans les mesures. — Erreurs possibles; formation d'azotate d'oxydule de mercure; formation d'oxyde de carbone quand l'acide carbonique n'a pas été absorbé d'abord; influence de la quantité d'oxygène contenue dans l'air que l'on analyse; limites entre lesquelles la méthode par détonation est ap-

plicable. — Circonstances dans lesquelles il est nécessaire d'employer le gaz de la pile; erreurs que peut entraîner son emploi.— Emploi des boules de platine dans les mêmes circonstances; précautions à prendre quand on veut s'en servir; obstacles opposés par certains gaz à leur efficacité.

Détermination de l'oxygène par le phosphore.

Emploi du phosphore à froid; erreurs possibles; moyen de les éviter.

Emploi du phosphore à chaud. — Méthode de Brunner; inconvénients qu'elle présente.

Absorption de l'oxygène par le cuivre. — Méthode de MM. Dumas et Boussingault. — Avantages et inconvénients de cette méthode. — Précautions à prendre dans les pesées.

Absorption de l'oxygène par le plomb humide (Saussure); le fer divisé (Brunner); le cuivre humecté d'acide sulfurique et d'acide chlorhydrique (Gay-Lussac). — Par l'hydrate de protoxyde de fer (méthode de M. Dupasquier).

Emploi des absorbants liquides. — Usage des pipettes à gaz; avantages qu'elles présentent; absorption fractionnée.

Réactifs divers que l'on peut employer avec ces appareils; sulfures alcalins, hyposulfites et sulfites. — Sulfate de protoxyde de fer saturé de bioxyde d'azote; protochlorure de cuivre ammoniacal; sulfate de protoxyde de cuivre ammoniacal. — Précautions à prendre dans l'emploi de ces divers réactifs.

Détermination de la quantité d'acide carbonique contenue dans l'air; procédé de M. Thenard modifié par Saussure. — Procédé de M. Leblanc. — Détermination de l'acide carbonique avec les appareils de M. Regnault et de M. Doyère.

Expériences qui constatent la présence de l'hydrogène carboné et de l'ammoniaque dans l'air.

Appendice.

Application des méthodes eudiométriques à l'analyse des divers mélanges gazeux que l'on peut obtenir avec l'hydrogène, l'oxygène, l'azote, l'oxyde de carbone, l'acide carbonique, l'hydrogène protocarboné et l'hydrogène bicarboné.

Vu et approuvé,
LE DOYEN DE LA FACULTÉ DES SCIENCES,
MILNE EDWARDS.

Permis d'imprimer,
L'INSPECTEUR GÉNÉRAL DE L'INSTRUCTION PUBLIQUE
Chargé de l'Administration de l'Académie de la Seine,
CAYX.

PARIS. — IMPRIMERIE DE BACHELIER,
rue du Jardinet, 12.

q

$\frac{\pi}{4}$

0

$\frac{\pi}{4}$




89102098878
b89102098878a





